

## Application of the factorisation method and group theory to the relativistic problem of the free Landau electron

This article has been downloaded from IOPscience. Please scroll down to see the full text article.

1974 J. Phys. A: Math. Nucl. Gen. 7 1051

(<http://iopscience.iop.org/0301-0015/7/9/009>)

View [the table of contents for this issue](#), or go to the [journal homepage](#) for more

Download details:

IP Address: 171.66.16.87

The article was downloaded on 02/06/2010 at 04:59

Please note that [terms and conditions apply](#).

## Application de la méthode de factorisation et de la théorie des groupes au problème de l'électron de Landau relativiste

A Crubellier et S Feneuille

Laboratoire Aimé Cotton, CNRS II, Bâtiment 505, 91405 Orsay, France

Reçu 8 Novembre 1973, présentation définitive 31 Décembre 1973

**Résumé.** Le problème relativiste de l'électron de Landau est étudié à l'aide de la méthode de factorisation et de la théorie des groupes. La séparation des variables en coordonnées cylindriques ( $z, \rho, \phi$ ) est effectuée sur la forme quaternionique de l'équation de Dirac. Les équations radiales peuvent être factorisées de deux façons différentes (type C et B), et ceci permet d'introduire deux algèbres de Lie ( $G(0, 1)$  et  $B_1$  respectivement). La première est directement liée à l'algèbre d'invariance  $G(0, 1)$  du système. La seconde, qui contient une variable supplémentaire sans signification physique, permet de définir des opérateurs tensoriels simples tels que  $\rho^n$  ( $n$  entier); le calcul de leurs éléments de matrice conduit à celui d'intégrales radiales qui peuvent avoir un intérêt physique.

**Abstract.** The relativistic problem of the free Landau electron is investigated by means of the factorization method and group theory. The Dirac equation is written in quaternionic form, which allows the variables to be separated in cylindrical coordinates ( $z, \rho, \phi$ ). Then, the radial equations are factorized in two different ways (C type and B type), and the corresponding Lie algebras ( $G(0, 1)$  and  $SO(2, 1)$  respectively) are introduced. The first one is closely related to the invariance algebra  $G(0, 1)$  of the system. The second one, which introduces a supplementary variable without physical meaning, allows us to define some simple tensor operators such as  $\rho^n$  ( $n$  integer); the evaluation of their matrix elements leads to some radial integrals which can be of physical interest.

### 1. Introduction

L'interprétation dans le cadre de la théorie des algèbres de Lie des propriétés des équations factorisables (Infeld et Hull 1951) permet d'introduire les techniques de la théorie des groupes dans l'étude des systèmes quantiques exactement solubles. En effet, ainsi que l'a montré Miller (1968), à toute équation factorisable peut être associée la réalisation d'une algèbre de Lie par des opérateurs différentiels du premier ordre à deux variables (dont l'une est une variable auxiliaire). Les solutions de l'équation sont alors très simplement associées à des fonctions de base de représentations de l'algèbre et les conditions de normalisation sont reliées à l'unitarité de ces représentations. De plus, on peut introduire des opérateurs tensoriels dont les éléments de matrice peuvent être calculés à l'aide du théorème de Wigner-Eckart. Ces éléments de matrice sont directement reliés à ceux qui sont pris entre états physiques. Ceci est particulièrement important pour l'application de la méthode à des cas physiques, soit pour utiliser la théorie des perturbations lorsque le système étudié peut constituer une première approximation pour un système plus complexe, soit pour calculer des probabilités de transition.

Le cadre général de la méthode a été décrit dans un article précédent (Crubellier 1973). Nous décrivons ici un exemple d'application de cette méthode : l'étude de l'électron de Landau relativiste. Cet exemple, dont les solutions sont désormais classiques (Johnson et Lippman 1949) fournit en effet une illustration particulièrement significative de la méthode employée, alors que les problèmes physiques déjà étudiés par cette méthode (Armstrong 1970, 1971a, b, Crubellier et Feneuille 1971, Cunningham 1972, Dunlap et Armstrong 1972, Feneuille et Crubellier 1972) n'en soulignaient que certains aspects particuliers. En effet les équations radiales sont des équations factorisables du type C, qu'on transforme aisément en équations du type B. En conséquence, deux algèbres de nature très différente peuvent être introduites. La première, de type  $G(0, 1)$ , est étroitement reliée à l'algèbre d'invariance du système (qui comprend les rotations autour de Oz et les translations). Au contraire, la seconde, de type  $B_1$ , n'est pas une algèbre d'invariance, mais elle permet l'introduction d'opérateurs tensoriels simples. Signalons qu'une symétrie  $Sp(2)$  analogue à la symétrie  $SO(2, 1)$  trouvée ici a été utilisée pour l'électron de Landau non relativiste par Boon et Seligman (1973). Il serait cependant difficile de généraliser ce résultat au cas relativiste.

Dans une première partie nous rappelons comment le formalisme quaternionique décrit par Hautot (1970) permet d'effectuer la séparation des variables, essentielle avant toute étude de ce type.

Il est montré ensuite que la recherche de la fonction d'onde radiale quaternionique normée se ramène à celle des solutions normées de deux équations réelles du premier ordre.

Dans une troisième partie, l'algèbre d'invariance, qui engendre les rotations autour de Oz et les translations, est introduite, sous la forme quaternionique. Le spectre d'énergie du système est déduit des propriétés des représentations de cette algèbre.

Enfin, les équations radiales réelles sont résolues suivant la méthode décrite dans l'article déjà cité (Crubellier 1973), avec une attention particulière à la factorisation du type B qui conduit à la définition d'opérateurs tensoriels simples.

## 2. Séparation des variables

L'équation de Dirac de l'électron dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}$  s'écrit, avec les notations usuelles,

$$[c(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi}) + \beta m_0 c^2] \Psi = E \Psi, \quad (1)$$

où  $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + (e/c)\mathbf{A}$ ;  $-e$  est la charge de l'électron et  $\mathbf{A}$  le potentiel vecteur. Pour ce dernier si on impose que

$$\text{div } \mathbf{A} = 0,$$

on peut écrire (jauge dite symétrique)

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{B}),$$

et si

$$\mathbf{B} = (0, 0, B), \quad \mathbf{A} = (-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0).$$

La séparation des variables est grandement facilitée si on utilise le formalisme quaternionique décrit par Hautot (1970). Avec les notations de cet auteur, l'équation

(1) sous forme quaternionique s'écrit

$$\left( \nabla_3 + \sqrt{-1} \frac{e}{c\hbar} A_3 \right) u = uQ, \quad (2)$$

où :

$$Q = -\frac{1}{c\hbar} (i\sqrt{-1} E + jm_0 c^2),$$

$$\nabla_3 = i\partial_x + j\partial_y + k\partial_z,$$

$$A_3 = iA_x + jA_y + kA_z,$$

et la fonction d'onde  $u$  est une fonction quaternionique.

La symétrie du système suggère d'utiliser des coordonnées cylindriques. On a alors

$$\nabla_3 = e^{k\phi/2} \left( i\partial_\rho + j\frac{1}{\rho}\partial_\phi + k\partial_z \right) e^{-k\phi/2}$$

$$A_3 = e^{k\phi/2} j\frac{1}{2} B \rho e^{-k\phi/2}.$$

Si on pose  $u = e^{k\phi/2} v$ ,  $v$  est solution de l'équation

$$\left\{ i\partial_\rho + j \left[ \frac{1}{\rho} \left( \partial_\phi + \frac{k}{2} \right) + \sqrt{-1} \frac{eB}{2c\hbar} \rho \right] + k\partial_z \right\} v = vQ.$$

Cette équation est séparable, c'est-à-dire que  $v$  peut s'écrire comme produit de fonctions quaternioniques d'une seule variable :

$$v = Z(z)\Phi(\phi)R(\rho).$$

On obtient évidemment

$$Z(z) = \exp\left(\sqrt{-1} \frac{p_z}{\hbar} z\right)$$

$$\Phi(\phi) = \exp(\sqrt{-1} M\phi).$$

$p_z$  n'est pas quantifié ; par contre, puisque

$$u(\phi + 2\pi) = u(\phi),$$

$M$  doit prendre des valeurs demi-entières. Enfin, la fonction quaternionique radiale  $R(\rho)$  est solution de l'équation suivante :

$$\left[ i \left( \frac{d}{d\rho} + \frac{1}{2\rho} \right) + j\sqrt{-1} \left( \frac{M}{\rho} + \frac{eB}{2c\hbar} \rho \right) + k\sqrt{-1} \frac{p_z}{\hbar} \right] R(\rho) = R(\rho)Q. \quad (3)$$

### 3. Equations radiales

L'équation (3) est équivalente à un système de 4 équations différentielles scalaires du premier ordre couplées. Ce système est dégénéré ; on peut montrer sans difficulté que  $(R_1 + kR_4)$  et  $(iR_2 + jR_3)$  sont solutions de la même équation du second ordre. On peut donc écrire

$$(iR_2 + jR_3) = (R_1 + kR_4)U,$$

où  $U$  est un quaternion de la forme  $iA + jB$ , indépendant de  $\rho$ ; on montre aisément que pour que la fonction d'onde radiale, qui s'écrit alors

$$R = (R_1 + kR_4)(1 + U),$$

soit solution de l'équation (3), il faut et il suffit que  $U$  vérifie la condition

$$k\sqrt{-1}\frac{p_z}{\hbar}(U^2 - 1) = [Q, U], \quad (4)$$

et que  $(R_1 + kR_4)$  soit solution de l'équation

$$\left[ i\left(\frac{d}{d\rho} + \frac{1}{2\rho}\right) + j\sqrt{-1}\left(\frac{M}{\rho} + \frac{eB}{2c\hbar}\rho\right) \right] (R_1 + kR_4) = (R_1 + kR_4) \left( Q - k\sqrt{-1}\frac{p_z}{\hbar}U \right).$$

En outre, si l'on pose

$$\begin{aligned} R_1 &= R_+ + R_-, \\ R_4 &= \sqrt{-1}(R_+ - R_-), \end{aligned}$$

et

$$R_{\pm} = \rho^{-1/2}F_{\pm},$$

$F_+$  et  $F_-$  sont solutions du système suivant :

$$\begin{aligned} \left( -\frac{d}{d\rho} + \frac{M}{\rho} + \frac{eB}{2c\hbar}\rho \right) F_+ &= \alpha F_-, \\ \left( \frac{d}{d\rho} + \frac{M}{\rho} + \frac{eB}{2c\hbar}\rho \right) F_- &= \alpha' F_+, \end{aligned}$$

où  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont des coefficients complexes qui dépendent du choix de  $U$ ; la condition (4) sur  $U$  est équivalente à

$$\alpha\alpha' = \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2 \hbar^2} - \frac{p_z^2}{\hbar^2}.$$

On peut donc choisir  $U$  de façon telle que

$$\alpha = \alpha' = \left( \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2 \hbar^2} - \frac{p_z^2}{\hbar^2} \right)^{1/2} = \lambda.$$

Dans ce cas  $F_+$  et  $F_-$  peuvent être choisis réels et on montre facilement de plus que

$$\int F_+^2 d\rho = \int F_-^2 d\rho. \quad (5)$$

Finalement  $F_+$  et  $F_-$  sont les solutions respectives des deux équations suivantes :

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{(M \mp \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}{\rho^2} - \left( \frac{eB}{2c\hbar} \right)^2 \rho^2 - \frac{eB}{c\hbar} (M \pm \frac{1}{2}) + \lambda^2 \right] F_{\pm} = 0, \quad (6)$$

vérifiant la condition (5) et telles que la condition de normalisation suivante soit satisfaite :

$$\int \text{scalaire}(\bar{R}^* R) \rho d\rho = 1. \quad (7)$$

Compte tenu du choix fait pour  $U$ , la condition (7) s'écrit

$$\int F_+^2 d\rho = \int F_-^2 d\rho = \frac{p_z^2 c^2}{8E^2} = \mathcal{N}^2. \quad (8)$$

Les différentes composantes de la fonction radiale sont alors les suivantes :

$$\begin{aligned} R_1 &= \rho^{-1/2}(F_+ + F_-) \\ R_4 &= \sqrt{-1} \rho^{-1/2}(F_+ - F_-) \\ R_2 &= \rho^{-1/2}(aF_+ + bF_-) \\ R_3 &= \sqrt{-1} \rho^{-1/2}(aF_+ - bF_-), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} a &= -\frac{p_z}{\hbar} \left( \sqrt{-1} \frac{E - m_0 c^2}{c\hbar} + \lambda \right) \\ b &= \frac{p_z}{\hbar} \left( \sqrt{-1} \frac{E + m_0 c^2}{c\hbar} - \lambda \right). \end{aligned}$$

#### 4. Invariantes

Le système est évidemment invariant dans une translation quelconque et dans toute rotation autour de  $Oz$ . L'opérateur infinitésimal de rotation autour de  $Oz$  s'écrit en notation quaternionique (Hautot 1970)

$$J_z = -\sqrt{-1} \partial_\phi + \frac{1}{2} \sqrt{-1} k,$$

et il commute avec l'opérateur  $H_3 = \nabla_3 + \sqrt{-1}(e/c\hbar)A_3$ , c'est-à-dire que la fonction  $J_z u$  est solution de (2) pour la même valeur de  $E$  que  $u$ ; en fait on a

$$J_z u = M u,$$

et, en d'autres termes,  $J_z$  est un invariant du système.

Par contre l'opérateur infinitésimal  $T_n = (\mathbf{n} \cdot \nabla)$ , correspondant aux translations dans une direction définie par le vecteur unité  $\mathbf{n}$ , ne commute pas avec l'opérateur  $H_3$ . En effet une translation entraîne pour le potentiel vecteur un changement de jauge et donc modifie la phase des fonctions d'onde. On peut, comme l'ont montré Opechowski et Tam (1969), définir des opérateurs de translation 'magnétiques', qui commutent avec  $H_3$  et sont donc des invariants du système, mais dont l'expression dépend du choix de jauge initial. Avec la jauge symétrique utilisée ici, ces opérateurs infinitésimaux sont, pour les translations de direction  $\mathbf{n}$ :

$$T'_n = \left[ \mathbf{n} \cdot \left( \nabla - \sqrt{-1} \frac{e}{c\hbar} \mathbf{A} \right) \right].$$

Si l'on définit pour ces opérateurs la base suivante :

$$\begin{aligned} T'_z &= \partial_z \\ T'_\pm &= T'_x \pm \sqrt{-1} T'_y = \exp(\pm \sqrt{-1} \phi) \left( \partial_\rho \mp \frac{-\sqrt{-1} \phi}{\rho} \pm \frac{e\mathbf{B}}{2c\hbar} \rho \right), \end{aligned}$$

on constate alors que  $T'_z$  commute avec tous les autres invariants et que  $J_z$ ,  $T'_+$  et  $T'_-$  satisfont les relations de commutation suivantes :

$$[J_z, T'_{\pm}] = \pm T'_{\pm}$$

$$[T'_+, T'_-] = -\frac{2eB}{c\hbar}.$$

Par conséquent les opérateurs  $J_z$ ,  $T'_+$ ,  $T'_-$  et  $S = (2eB/c\hbar)I$  (où  $I$  est l'opérateur identité) forment la base d'une algèbre de Lie non semi-simple de type  $G(0, 1)$  (suivant les notations de Miller 1968). L'opérateur  $C_{01}$  défini par

$$C_{01} = T'_+ T'_- - J_z S$$

est un invariant de l'algèbre, qui peut être réécrit

$$C_{01} = -(H_3 H_3 + \partial_z^2) - \frac{eB}{c\hbar},$$

ce qui conduit à

$$C_{01}u = \left[ -\left(Q^2 - \frac{p_z^2}{\hbar^2}\right) - \frac{eB}{c\hbar} \right] u = -\left(\lambda^2 + \frac{eB}{c\hbar}\right)u.$$

Pour une valeur donnée de l'énergie (donc de  $\lambda^2$  ou de la valeur propre  $\omega$  de l'invariant  $C_{01}$ ), les fonctions  $u$  forment une représentation unitaire de l'algèbre d'invariance. Pour que les fonctions  $u$  soient normalisables, ces représentations doivent nécessairement être des représentations unitaires du type  $\downarrow_{s, M_0}$  (avec les notations de Miller 1968) où  $M_0 + \frac{1}{2} \geq 0$ . Pour une telle représentation, le spectre de  $J_z$  est donné par  $M = M_0 - p$  ( $p$  entier  $\geq 0$ ) et la valeur propre  $\omega$  de  $C_{01}$  est liée à  $M_0$  et à la valeur propre  $s$  de  $S$  par

$$\omega = -s(M_0 + 1).$$

Or on a ici  $s = 2eB/c\hbar$  et  $\omega = -[\lambda^2 + (eB/c\hbar)]$ ; d'autre part la relation  $M = M_0 - p$  ( $p$  entier  $\geq 0$ ) liée à la condition  $M_0 + \frac{1}{2} \geq 0$  entraîne que

$$M_0 = \frac{M + |M + \frac{1}{2}|}{2} + N \quad (N \text{ entier } \geq 0).$$

Finalement le spectre d'énergie est donné par

$$\frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2 \hbar^2} = \frac{p_z^2}{\hbar^2} + \frac{2eB}{c\hbar} \left( \frac{M + \frac{1}{2} + |M + \frac{1}{2}|}{2} + N \right). \quad (9)$$

## 5. Fonctions radiales. Algèbre $SO(2, 1)$

La fonction d'onde radiale  $R(\rho)$  est complètement caractérisée par la donnée de  $F_+$  et  $F_-$ ; celles-ci sont les solutions des équations (6) qui vérifient les conditions (8). Or ces équations sont des équations factorisables du type C. Il a été montré (Crubellier 1973) que les solutions sont reliées à des fonctions de base de représentations unitaires d'une

algèbre  $G(0, 1)$ . Cette algèbre a pour base les opérateurs  $\mathcal{J}_3, \mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-$  et  $-S$  définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 &= -\sqrt{-1} \partial_\tau \\ \mathcal{J}_\pm &= \exp(\pm \sqrt{-1} \tau) \left( \mp \partial_\rho + \frac{-\sqrt{-1} \partial_\tau \pm \frac{1}{2}}{\rho} - \frac{eB}{2c\hbar \rho} \right) \\ S &= + \frac{2eB}{c\hbar} I. \end{aligned}$$

Si on identifie la variable supplémentaire  $\tau$  qu'on introduit ainsi avec la variable physique  $\phi$ , on constate que cette algèbre est étroitement liée à celle du paragraphe précédent. En fait, étant donnée l'expression de  $u$  en fonction de  $F_+$  et  $F_-$ , qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} u &= \rho^{-1/2} Z(z) \{ (1 + \sqrt{-1}k) \exp[\sqrt{-1}(M - \frac{1}{2})\phi] F_+ \\ &\quad + (1 - \sqrt{-1}k) \exp[\sqrt{-1}(M + \frac{1}{2})\phi] F_- \} (1 + U), \end{aligned}$$

on montre à partir des propriétés d'invariance du système que les fonctions  $\exp[\sqrt{-1}(M \mp \frac{1}{2})\phi] F_\pm$  sont fonctions de base de la représentation unitaire  $\downarrow_{s, M_0}$  de deux algèbres  $G(0, 1)$  qui ont pour base  $\mathcal{J}_3 \pm \frac{1}{2}, \mathcal{J}_+, -\mathcal{J}_-$  et  $S$ . On en déduit aisément que ces mêmes fonctions sont des fonctions de base des représentations unitaires  $\uparrow_{-s, M_0 \mp \frac{1}{2}}$  de l'algèbre qui a pour base  $\mathcal{J}_3, \mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-$  et  $S$ .

Cependant, bien que le type C de factorisation des équations (6) soit lié à l'algèbre d'invariance, il apparaît préférable de transformer ces équations en équations factorisables du type B, et d'introduire ainsi une algèbre de type  $B_1$  (différente de celle introduite par Yanagawa 1973), qui n'est pas une algèbre d'invariance mais qui permet de définir des opérateurs tensoriels simples et de calculer aisément leurs éléments de matrice. La méthode utilisée est décrite en détail dans l'article déjà cité (Crubellier 1973) et nous n'en rappelons ici que les points essentiels.

Si l'on écrit une équation factorisable B sous la forme

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} - d^2 e^{2ax} + 2ad\mu e^{ax} - a^2(\omega + \frac{1}{4}) \right) \phi_\omega^\mu = 0 \quad (10)$$

l'algèbre  $B_1$  introduite a pour base

$$\begin{aligned} J_3 &= -\sqrt{-1} \partial_\tau \\ J_\pm &= \frac{1}{a} \exp(\pm \sqrt{-1} \tau) [\partial_x \mp d e^{ax} \pm a(-\sqrt{-1} \partial_\tau \pm \frac{1}{2})], \end{aligned}$$

où  $\tau$  est une variable auxiliaire. Si les fonctions  $\phi_\omega^\mu$  sont normées suivant la condition

$$\int (\phi_\omega^\mu)^2 dx = 1, \quad (11)$$

les fonctions  $\Phi_\omega^\mu = \exp(\sqrt{-1}\mu\tau)\phi_\omega^\mu$  forment pour  $\omega$  donné une base orthonormée d'une représentation unitaire de l'algèbre réelle  $SO(2, 1)$  liée à l'algèbre  $B_1$ .  $\omega$  est la valeur propre de l'opérateur de Casimir de l'algèbre et les valeurs de  $\mu$  forment le spectre de  $J_3$  dans cette représentation. Les représentations unitaires ainsi formées sont (Barut and Fronsdal 1965, Crubellier 1973):

(i) si  $d/a > 0$ ,  $\uparrow_{\mu_0}^*$  avec  $\mu_0 - \frac{1}{2} > 0$ ; on a alors  $\omega = \mu_0(\mu_0 - 1)$  et le spectre de  $J_3$  est  $\mu = \mu_0 + p$  ( $p$  entier  $\geq 0$ );



(ii) si  $d/a < 0$ ,  $\downarrow_{\mu_0}^*$  avec  $\mu_0 + \frac{1}{2} < 0$ ; on a alors  $\omega = \mu_0(\mu_0 + 1)$  et le spectre de  $J_3$  est  $\mu = \mu_0 - p$  ( $p$  entier  $\geq 0$ );

(iii)  $D_p(E_0\Phi)^*$  (représentations dites principales), où  $\Phi + \frac{1}{2}$  est imaginaire pur; on a alors  $\omega = \Phi(\Phi + 1)$  et le spectre de  $J_3$  est  $\mu = E_0 + p$  ( $p$  entier).

Les opérateurs définis par

$$T_q^{(k)} = \exp(\sqrt{-1}q\tau) e^{kx}$$

forment des bases de représentations d'opérateurs tensoriels de l'algèbre. Ces représentations ne sont irréductibles que dans certains cas particuliers :

(i)  $2k$  entier  $< 0$  et  $-k - |q| = 0, 1, \dots, -k$  (représentation finie  $D^{-k}$ );

(ii)  $2k$  entier  $\geq 0$  et soit  $q \leq -k$  (représentation  $\downarrow_{-k}$ ), soit  $q \geq k$  (représentation  $\uparrow_k$ ).

On peut cependant calculer également les éléments de matrice de certains opérateurs  $T_q^{(k)}$  qui n'appartiennent pas à des représentations irréductibles. L'expression de ces éléments de matrice a été obtenue (Crubellier 1973) pour des fonctions bra et ket appartenant à des représentations du type  $\uparrow_{\mu_0}^*$ .

La transformation des équations (6) en équations du type B est réalisée au moyen des changements suivants :

$$\rho = e^{x/2}$$

$$F_{\pm} = e^{x/4} \phi_{\pm}.$$

Ces équations deviennent alors

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \left( \frac{eB}{4c\hbar} \right)^2 e^{2x} - \frac{eB}{4c\hbar} \left( M \pm \frac{1}{2} + \frac{c\hbar}{eB} \lambda^2 \right) e^x - \frac{1}{4} \left( M \mp \frac{1}{2} \right)^2 \right] \phi_{\pm} = 0, \quad (12)$$

et les conditions (8) sont remplacées par

$$\int \phi_+^2 e^x dx = \int \phi_-^2 e^x dx = 2\mathcal{N}^2. \quad (13)$$

Les équations (12) sont du type (10) si on fait les identifications suivantes :

$$a = 1$$

$$d = \frac{eB}{4c\hbar}$$

$$\mu_{\pm} = -\frac{1}{2} \left( M \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{4d} \lambda^2 \right)$$

$$\omega_{\pm} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left( M \mp \frac{1}{2} \right)^2.$$

Puisque  $d/a > 0$  et  $\omega + \frac{1}{4} > 0$ , les seules représentations qui interviennent sont les représentations du type  $\uparrow_{\mu_0}^*$  ( $\mu_0 - \frac{1}{2} > 0$ ). D'après les valeurs de  $\omega_+$  et  $\omega_-$  on a

$$\mu_{0\pm} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} |M \mp \frac{1}{2}|,$$

et donc, puisque  $\mu_{\pm} = \mu_{0\pm} + N_{\pm}$  ( $N_+$  et  $N_-$  étant des entiers  $\geq 0$ ), on a

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{eB}{c\hbar} \left( M - \frac{1}{2} + |M - \frac{1}{2}| + 2N_+ - 2 \right) \\ &= \frac{eB}{c\hbar} \left( M + \frac{1}{2} + |M + \frac{1}{2}| + 2N_- \right). \end{aligned}$$

On remarque que pour  $M < 0$  et  $N_- = 0$ , on a  $F_+ = 0$  (et donc  $N_+$  n'a plus de signification), ce qui permet d'écrire finalement le spectre d'énergie sous la forme (9).

En ce qui concerne les fonctions d'onde, si on note  $\phi_{\mu_0}^\mu$  les fonctions de base (normées suivant la condition (11)) des représentations  $\uparrow_{\mu_0}^*$ , on a

$$\phi_{\pm} = C_{\pm} \phi_{\mu_0 \pm}^{\mu_{\pm}}.$$

La présence des coefficients  $C_+$  et  $C_-$  est due à la différence entre les conditions de normalisation (11) et (13).

La forme explicite des fonctions  $\phi_{\mu_0}^\mu$  est la suivante :

$$\phi_{\mu_0}^\mu = \left[ \frac{(\mu - \mu_0)!(2\mu_0 - 1)}{(\mu_0 + \mu - 1)!^3} \right]^{1/2} \exp(-d e^x) (2d e^x)^{\mu_0 - \pm} L_{\mu - \mu_0}^{2\mu_0 - 1}(2d e^x),$$

où  $L_n^a(x)$  est un polynôme de Laguerre ; on a, ici,  $e^x = \rho^2$ .

A partir des éléments de matrice des opérateurs  $T_q^{(k)}$ , pris entre des fonctions de base de représentations  $\uparrow_{\mu_0}^*$ , on peut calculer les intégrales radiales des opérateurs  $\rho^n$ , où  $n$  est entier. En effet celles-ci font intervenir les intégrales

$$\int F_+^2 \rho^n d\rho, \quad \int F_-^2 \rho^n d\rho \quad \text{et} \quad \int F_+ F_- \rho^n d\rho,$$

qui sont reliées simplement à des éléments de matrice de  $T_q^{(\frac{1}{2}n+1)}$  : la dernière intégrale, par exemple, s'écrit

$$\begin{aligned} & \int F_+ F_- \rho^n d\rho \\ &= \frac{1}{2} \int \phi_+ \phi_- \exp[(\frac{1}{2}n+1)x] dx \\ &= \frac{1}{2} C_+ C_- \int \phi_{\mu_0+}^{\mu_0+} \phi_{\mu_0-}^{\mu_0-} \exp[(\frac{1}{2}n+1)x] dx \\ &= \frac{1}{2} C_+ C_- (\Phi_{\mu_0+}^{\mu_0+} | T_{(\mu_0+ - \mu_0-)}^{(\frac{1}{2}n+1)} | \Phi_{\mu_0-}^{\mu_0-}). \end{aligned}$$

Une application particulière du calcul d'intégrales radiales est la détermination des coefficients  $C_+$  et  $C_-$ . Ils sont en effet définis par

$$C_{\pm}^2 \int (\phi_{\mu_0 \pm}^{\mu_{\pm}})^2 e^x dx = 2\mathcal{N}^2.$$

Or l'intégrale qui intervient ici est égale à un élément de matrice diagonal de l'opérateur  $T_0^{(1)}$ , dont l'expression générale est (Crubellier 1973)

$$(\Phi_{\mu_0}^{\mu} | T_0^{(1)} | \Phi_{\mu_0}^{\mu}) = \frac{a}{2d} (2\mu_0 - 1).$$

Par conséquent :

$$C_{\pm} = \mathcal{N} \left( \frac{eB}{c\hbar(2\mu_{0\pm} - 1)} \right)^{1/2}.$$

Nous avons déjà signalé que le principal avantage de cette méthode d'étude des systèmes quantiques exactement solubles réside dans la possibilité de définir des opérateurs tensoriels simples et de calculer leurs éléments de matrice. Plus précisément dans

le cas considéré, on calcule ainsi les intégrales radiales de  $\rho^n$  ( $n$  entier). Si l'on introduit au préalable un potentiel  $V(z)$  qui lève la dégénérescence des niveaux d'énergie, ces intégrales radiales peuvent être utilisées dans un calcul de perturbation. On pourrait ainsi étudier le système noyau électron dans un champ magnétique intense, en considérant le potentiel coulombien comme une perturbation (Hasegawa et Howard 1961). Il faut remarquer qu'on peut également, pour étudier ce même système, définir un potentiel effectif fonction de  $\rho$  et de  $z$ , qu'on développe au voisinage de la zone de plus grande attraction (Gajewski 1970). Avec cette approximation, on obtient des équations séparées qu'on peut transformer en équations factorisables du type B: on pourrait alors faire une étude en tous points analogue à celle développée ici et en utiliser les résultats dans un calcul perturbatif.

## Références

- Armstrong L Jr 1970 *J. Phys., Paris* **31** C4 17-23  
 — 1971a *Phys. Rev. A* **3** 1546-50  
 — 1971b *J. math. Phys.* **12** 953-7  
 Barut A O et Fronsdal C 1965 *Proc. R. Soc. A* **287** 532-48  
 Boon M H et Seligman T H 1973 *J. math. Phys.* **14** 1224-7  
 Crubellier A 1973 *Proc. Conf. on Group Theoretical Methods in Physics, Nijmegen, Netherlands* ed A Janner à paraître  
 Crubellier A et Feneuille S 1971 *J. Phys., Paris* **32** 405-11  
 Cunningham M J 1972 *J. math. Phys.* **13** 33-9  
 Dunlap B I et Armstrong L Jr 1972 *Phys. Rev. A* **6** 1370-4  
 Feneuille S et Crubellier A 1972 *J. Phys. A: Gen. Phys.* **5** 944-9  
 Gajewski R 1970 *Physica* **47** 575-95  
 Hasegawa H et Howard R E 1961 *J. Phys. Chem. Solids* **21** 179-98  
 Hautot A P 1970 *Physica* **48** 609-19  
 Infeld L et Hull T E 1951 *Rev. mod. Phys.* **23** 21-68  
 Johnson M H et Lippman B A 1949 *Phys. Rev.* **76** 828-32  
 Miller W Jr 1968 *Lie Theory and Special Functions* (New York et London: Academic Press)  
 Opechowski W et Tam W G 1969 *Physica* **42** 529-56  
 Yanagawa S 1973 *Phys. Rev. D* **7** 2412-4